微观经济学: 作业 Chapter-4

赵时亮 周六 [2], 周二（双）[3]

赵时亮

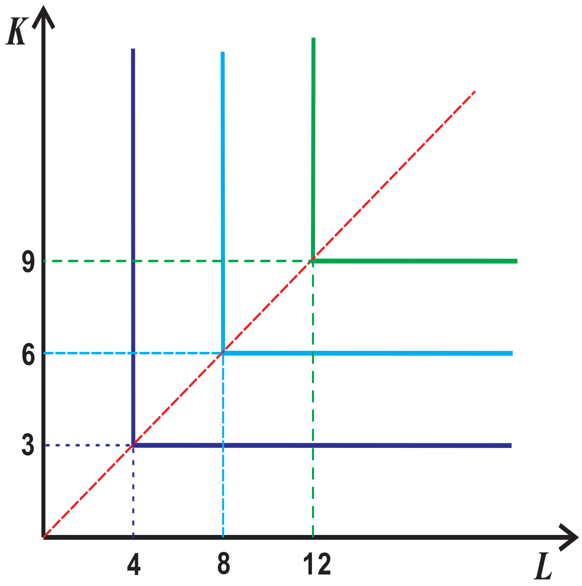
May 6, 2014

1. 用图说明短期生产函数 $Q = f(L, \overline{K})$ 的 TP_L 曲线，AP_L 和 MP_L 曲线的特征及相互之间的关系。

2. 设生产函数为 $Q = \min\{3L, 4K\}$.

   (a) 画出生产函数图。

Solution:



   (b) 当产量为 36 时，厂商投入要素的最佳组合是多少?

Solution:

该生产函数的最佳要素投入为 $3L = 4K = 36$, 可得要素投资组合为 $\{L = 12, K = 9\}$

   (c) 假设 $P_L = 3$,$P_K = 5$，那么要生产 420 单位的产品，最小成本是多少?

Solution:

生产 420 单位产品时，要素投入为 $\{L = \frac{420}{3} = 140; K = \frac{420}{4} = 105\}$

成本 $C = P_L \times L + P_K \times K = 3 \times 140 + 5 \times 105 = 945$

3. 假设厂商有生产函数 $Q = f(L, K) = 2KL - 0.5L^2 - 0.5K^2$。

   (a) 短期生产中当资本量给定时，该厂商的 TP_L,AP_L 和 MP_L 函数各是多少?

Solution:

$TP_L = 2\overline{K}L - 0.5L^2 - 0.5\overline{K}^2$

$$AP_L = \frac{TP_L}{L} = 2\overline{K} - 0.5L - \frac{0.5\overline{K}^2}{L}$$

$$MP_L = \frac{dTP_L}{dL} = 2\overline{K} - L$$

(b) 当资本量 $K = 10$ 时，上述各函数取最大值时应该投入多少 L？

Solution:

取最大值时，上述函数的一阶导数为零。

$$\frac{dTP_L}{dL} = \frac{dTP_L}{dL} = (2\overline{K} - L)_{K=10} = 0$$

$\Rightarrow L = 20$, 即当 $L = 20$ 时，总产量最大。

$$\frac{dAP_L}{dL} = \left(-0.5 + \frac{0.5\overline{K}^2}{L^2}\right)_{K=10} = 0 \Rightarrow L = 10$$

当 $L = 10$ 时，平均产量最大。

$$\frac{dMP_L}{dL} = 0 - 1 = -1$$

即 MP_L 对于 L 是单调降函数，只有当 $L = 0$ 时，MP_L 能取最大值。

(c) 当资本量 $K = 10$ 时，厂商在合理的生产阶段投入的 L 应该在什么范围内？

Solution:

厂商合理的投资区域一般会处于平均产出最大值和边际产出等于零之间的第二阶段。在本例中，平均产量达到最大值时 $L = 10$, 边际产量等于零时 $L = 20$，所以厂商合理的要素投资区域会在 $\{L = 10, L = 20\}$ 之间。

(d) 厂商的生产函数是齐次的吗？它的规模报酬递增还是递减？

Solution:

$$\begin{aligned} f(tL, tK) &= 2(tK)(tL) - 0.5(tL)^2 - 0.5(tK)^2 \\ &= t^2(2KL - 0.5L^2 - 0.5K^2) \\ &= t^2 f(L, K) \end{aligned}$$

该生产函数是 2 阶齐次函数，且规模报酬递增。

4. 已知某厂商生产函数 $Q = \frac{1}{2}L^{2/3}K^{1/3}$，当劳动价格 $w = 50$，资本价格 $r = 25$，求当成本 $C = 7500$ 时，该厂商最大产量的 L 和 K 的组合是多少？

Solution:

在最佳要素组合时有 $\dfrac{MP_L}{MP_K} = \dfrac{w}{r}$

$MP_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}L^{-1/3}K^{1/3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{K}{L}}$

$MP_K = \frac{dQ}{dK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}L^{2/3}K^{-2/3} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{L^2}{K^2}}$

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{K}{L}}\right) / \left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{L^2}{K^2}}\right) = 2\frac{K}{L} = \frac{50}{25}$$

$\Rightarrow K = L.$

由成本约束条件得 $wL + rK = 8000 \Rightarrow 50L + 25K = 7500$

解上述方程组，得到最佳的生产要素组合为 $\{L = 100, K = 100\}$.

5. 假设厂商短期生产函数为 $Q = 30L + 9L^2 - 2L^3$

   (a) 该厂商的平均产量函数和边际产量函数。

   Solution:
   $AP_L = \frac{TP_L}{L} = 30 + 9L - 2L^2$
   $MP_L = \frac{dYP_L}{dL} = 30 + 18L - 6L^2$

   (b) 如果企业投入了 $L = 3$，是否处于短期合理的产出区域？为什么？

   Solution:
   平均产量达到最大值时有 $\dfrac{dAP_L}{dL} = 0$，即 $9 - 4L = 0 \Rightarrow L = 2.25$
   边际产量为零时有 $30 + 18L - 6L^2 = 0 \Rightarrow L = 4.19$
   当企业投入 $L = 3$ 时，处于生产的第二阶段，所以是合理的产出区域。

6. 已知厂商的生产函数如下，求厂商的长期生产扩展线方程：

   (a) $Q = 6L^{1/3}K^{2/3}$

   Solution:
   $$MP_L = \frac{6\times 1}{3}\sqrt[3]{\frac{K^2}{L^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{K^2}{L^2}}$$
   $$MP_K = \frac{6\times 2}{3}\sqrt[3]{\frac{L}{K}} = 4\sqrt[3]{\frac{L}{K}}$$
   由最优要素组合的均衡条件 $\dfrac{MP_L}{MP_K} = \dfrac{P_L}{P_K}$, 可得：
   $$\frac{K}{2L} = \frac{P_L}{P_K}$$
   可得厂商长期生产扩展方程为：$K = 2L\dfrac{P_L}{P_K}$

   (b) $Q = \dfrac{2KL}{2K + 3L}$

Solution:
$MP_L = \frac{2\,K}{2\,K+3\,L} - \frac{6\,K\,L}{(2\,K+3\,L)^2}$
$MP_K = \frac{2\,L}{2\,K+3\,L} - \frac{4\,K\,L}{(2\,K+3\,L)^2}$
$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{2\,K^2}{3\,L^2} = \frac{P_L}{P_K}$
可得厂商长期生产扩展方程为：$K = L\sqrt{\frac{3P_L}{2P_K}}$

(c) $Q = K^2L$

Solution:
$MP_L = K^2$
$MP_K = 2KL$
$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K}{2\,L} = \frac{P_L}{P_K}$
可得厂商长期生产扩展方程为：$K = 2L\frac{P_L}{P_K}$.

(d) $Q = \min(3L, 2K)$

Solution:
这是固定比例生产函数，厂商按 $2K = 3L$ 的比例投入生产要素。可得厂商长期生产扩展方程为：$K = 1.5L$。

7. 令生产函数 $f(L,K) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{LK} + \alpha_2 K + \alpha L$, 其中 $0 \le \alpha_i \le 1, \forall i = 0,1,2,3$。

(a) 当满足什么条件时，该生产函数是报酬不变的？

Solution:
$$\begin{aligned} f(\lambda L, \lambda K) &= \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{(\lambda L)(\lambda K)} + \alpha_2\lambda K + \alpha\lambda L \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\lambda\sqrt{LK} + \alpha_2\lambda K + \alpha\lambda L \\ &= \lambda[\alpha_0 + \alpha_1\sqrt{LK} + \alpha_2 K + \alpha L] + (1-\lambda)\alpha_0 \\ &= \lambda f(L,K) + (1-\lambda)\alpha_0 \end{aligned}$$
当生产函数为规模报酬不变时，有 $f(\lambda L, \lambda K) = \lambda f(L,K)$，所以应该有 $(1-\lambda)\alpha_0 = 0$。因为 $\lambda \neq 1$($\lambda = 1$ 时就是原生产函数), 所以必须有 $\alpha_0 = 0$

(b) 证明：当该生产函数是规模报酬不变时，相应的边际产量是递减的。

Solution:

当 $\alpha_0 = 0$ 时，生产函数为 $f(L,K) = \alpha_1\sqrt{LK} + \alpha_2 K + \alpha L$

$MP_L = \frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} + \alpha_3$

$MP_K = \frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} + \alpha_3$

$\frac{dMP_L}{dL} = -\frac{1}{4}L^{-\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}} < 0, \forall K, L > 0$

$\frac{dMP_K}{dK} = -\frac{1}{4}L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{2}} < 0, \forall K, L > 0$

这说明当该生产函数是规模报酬不变时，相应的边际产量是递减的。